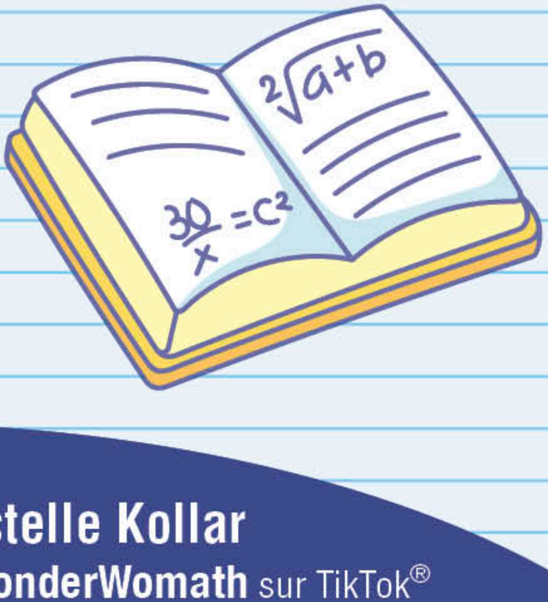
Maths 20/20

3e

LA FACE CACHÉE DES FORMULES ET THÉORÈMES



Estelle Kollar

WonderWomath sur TikTok®

400 000 abonnés

300 vidéos

ellipses

CHAPITRE 1

PUISSANCE D'EXPOSANT NÉGATIF

PRÉ-REQUIS

- ▶ Fractions décimales *[6ᵉ]* ☐
- ▶ Multiplication par 10 ; 100 ; 1 000… *[6ᵉ]* ☐
- ▶ Multiplication par 0,1 ; 0,01 ; 0,001… *[6ᵉ]* ☐
- ▶ Multiplier et diviser des nombres relatifs *[4ᵉ]* ☐
- ▶ Puissance d'exposant positif *[4ᵉ]* ☐
- ▶ Notion d'inverse d'un nombre *[4ᵉ]* ☐
- ▶ Division et multiplication de fractions *[4ᵉ]* ☐

ON FAIT LE POINT

		A	B	C
1	Calculer mentalement $3\times3\times3$	9	18	27
2	L'écriture 4^5 signifie :	$4\times4\times4\times4\times4$	4×5	$5\times5\times5\times5$
3	Calculer mentalement 13^0	0	1	13
4	Calculer mentalement $\left(-2\right)^4$	-8	16	-16
5	Calculer mentalement $\frac{1}{9}\div3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{27}$

Solutions : 1. C 2. A 3. B 4. B 5. C

COMPRENDRE LA FORMULE

Pour comprendre les **puissances d'exposant négatif**, on va démarrer le raisonnement avec des puissances d'exposant positif.

Plutôt que d'alourdir la démonstration en utilisant une variable *x*, on va découvrir cette nouvelle notion en utilisant les **puissances de 3** :

Si on soustrait 1 à l'exposant …

$$3^4 = 3\times3\times3\times3 = \mathbf{81}$$
$$3^3 = 3\times3\times3 = \mathbf{27}$$
$$3^2 = 3\times3 = \mathbf{9}$$
$$3^1 = \mathbf{3}$$
$$3^0 = \mathbf{1}$$

… on divise par 3 le résultat.

On poursuit de la même façon pour obtenir les puissances de 3 d'exposant négatif.

À chaque étape, on soustrait 1 à l'exposant …

$$3^0 = 1$$
$$3^{-1} = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}$$
$$3^{-3} = \frac{1}{9} \div 3 = \frac{1}{27}$$
$$3^{-4} = \frac{1}{27} \div 3 = \frac{1}{81}$$

… et on divise par 3 le résultat.

RAPPELS

- Une fraction est définie comme le **quotient** d'un nombre entier relatif par un nombre entier relatif non nul. C'est pourquoi $1 \div 3 = \frac{1}{3}$
- Diviser par un nombre est équivalent à multiplier par son inverse.

  Et l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

  C'est pourquoi $\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

  ou encore $\frac{1}{9} \div 3 = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

On résume les résultats sur un schéma : quelle conjecture peux-tu faire ?

3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^{0}	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}
$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81

$\frac{1}{81}$ est l'inverse de 81 donc 3^{-4} est l'inverse de 3^{4}.

$\frac{1}{27}$ est l'inverse de 27 donc 3^{-3} est l'inverse de 3^{3}.

$\frac{1}{9}$ est l'inverse de 9 donc 3^{-2} est l'inverse de 3^{2}.

$\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3 donc 3^{-1} est l'inverse de 3^{1}.

On peut ainsi généraliser cette conjecture :

> x^{-n} est l'inverse de x^{n}.
>
> ***n*** est une variable représentant un nombre entier.
>
> ***x*** est une variable représentant un nombre quelconque non nul.

ENTRAÎNE-TOI

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat en écriture fractionnaire

a. 3^{-6}

b. 2^{-5}

c. $(-8)^{-3}$

d. $(-1)^{-4}$

e. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2}$

Exercice 2 : Calculer et donner le résultat en écriture décimale

a. 2^{-2}

b. 10^{-3}

c. $(-2)^{-1}$

d. $(-10)^{-4}$

e. $\left(\dfrac{100}{9}\right)^{-3}$

Exercice 3 : Exprimer chaque nombre à l'aide d'une puissance de 2

a. $\dfrac{1}{16}$

b. 0,5

c. 0,125

d. $\dfrac{1}{64}$

e. 1

Exercice 4 : Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX et expliquer

a. *Affirmation* 1 : "$2^4 + 2^{-4} = 0$"

b. *Affirmation* 2 : "$2^4 \times 2^{-4} = 0$"

c. *Affirmation* 3 : "$2^5 \times 2^{-3} = 2^2$"

d. *Affirmation* 4 : "$\dfrac{2^3}{2^4} = 2^1$"

e. *Affirmation* 5 : "$\dfrac{2^4}{2^{-2}} = 2^6$"

DÉCOUVERTE D'UNE PROPRIÉTÉ

Les puissances de 10 sont fascinantes !

1. Donner l'écriture décimale de
10^5, 10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} et 10^{-5}.

2. Que remarques-tu ?

Exercice 5 : Donner l'écriture scientifique de chaque nombre

▶ *Exemple :* **0,0032** $= 3{,}2 \times 0{,}001 =$ **$3{,}2 \times 10^{-3}$**

a. 610

b. 0,78

c. 0,000 5

d. 74 010

e. 0,000 000 41

Exercice 6 : Donner l'écriture décimale de chaque nombre

▶ *Exemple :* **$4{,}05 \times 10^{-2}$** $= 4{,}05 \times 0{,}01 =$ **0,0405**

a. 4×10^{2}

b. $6{,}1 \times 10^{3}$

c. $5{,}9 \times 10^{-3}$

d. $9{,}9 \times 10^{-1}$

e. $7{,}003 \times 10^{-4}$

DÉFI

Donner l'écriture scientifique de $0{,}000\,78 \times 10^{-5}$.

Exercice 1

a. 3^{-6} *est l'inverse de* 3^6.

$3^6 = 3\times3\times3\times3\times3\times3 = 729$

Donc $3^{-6} = \mathbf{\frac{1}{729}}$.

b. 2^{-5} *est l'inverse de* 2^5.

$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$

Donc $2^{-5} = \mathbf{\frac{1}{32}}$.

c. $(-8)^{-3}$ *est l'inverse de* $(-8)^3$.

$(-8)^3 = (-8)\times(-8)\times(-8) = -512$

Donc $(-8)^{-3} = \mathbf{\frac{1}{-512}}$ **ou** $\mathbf{\frac{-1}{512}}$.

d. $(-1)^{-4}$ *est l'inverse de* $(-1)^4$.

$(-1)^4 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = 1$

Donc $(-1)^{-4} = \mathbf{1}$.

e. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ *est l'inverse de* $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

Donc $\left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \mathbf{\frac{25}{9}}$.

Exercice 2

a. 2^{-2} *est l'inverse de* 2^2.

$2^2 = 2\times2 = 4$

Donc $2^{-2} = \frac{1}{4} = \mathbf{0{,}25}$.

b. 10^{-3} *est l'inverse de* 10^3.

$10^3 = 10\times10\times10 = 1000$

Donc $10^{-3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$.

c. $(-2)^{-1}$ *est l'inverse de* $(-2)^1$.

$(-2)^1 = -2$

Donc $(-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = \mathbf{-0{,}5}$.

d. $(-10)^{-4}$ *est l'inverse de* $(-10)^4$.

$$(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10)$$
$$= 10\,000$$

Donc $(-10)^{-4} = \frac{1}{10\,000} = \mathbf{0{,}0001}$.

e. $\left(\frac{100}{9}\right)^{-3}$ *est l'inverse de* $\left(\frac{100}{9}\right)^{3}$.

$\left(\frac{100}{9}\right)^{3} = \frac{100}{9}\times\frac{100}{9}\times\frac{100}{9} = \frac{1\,000\,000}{729}$

Donc $\left(\frac{100}{9}\right)^{-3} = \frac{729}{1\,000\,000} = \mathbf{0{,}000\,729}$.

Exercice 3

a. $\frac{1}{16}$ *est l'inverse de* 16.

$16 = 2\times2\times2\times2 = 2^4$

Donc $\frac{1}{16} = \mathbf{2^{-4}}$.

b. $0{,}5 = \frac{1}{2}$ *est l'inverse de* 2.

$2 = 2^1$

Donc $0{,}5 = \mathbf{2^{-1}}$.

c. $0{,}125 = \frac{1}{8}$ *est l'inverse de* 8.

$8 = 2\times2\times2 = 2^3$

Donc $0{,}125 = \mathbf{2^{-3}}$.

d. $\frac{1}{64}$ *est l'inverse de* 64.

$64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6$

Donc $\frac{1}{64} = \mathbf{2^{-6}}$

e. $1 = \mathbf{2^0}$ (*pas besoin d'inverser* !)

Exercice 4

Affirmation 1 : **FAUX**

$2^4 = 2\times2\times2\times2 = 16$

2^{-4} *est l'inverse de* 2^4 *donc* $= \frac{1}{16}$

16 *et* $\frac{1}{16}$ *sont positifs et non nuls donc leur somme ne peut pas être égale à* 0.

On peut sinon s'amuser à faire le calcul et $16 + \frac{1}{16} = \frac{257}{16}$ *qui est différent de* 0.

Affirmation 2 : **FAUX**

2^{-4} *est l'inverse de* 2^4 *donc par définition* (*vu en* 4e) *leur produit est égal* à 1.

Affirmation 3 : **VRAI**

$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$ *et* $2^{-3} = \frac{1}{8}$ (*déjà calculé* à *l'exercice* 3)

$32\times\frac{1}{8} = \frac{32}{8} = 4$

Or $4 = 2^2$

Affirmation 4 : **FAUX**

$2^3 = 2\times2\times2 = 8$

$2^4 = 2\times2\times2\times2 = 16$

$\frac{8}{16} = 0{,}5$

Or $0{,}5 = 2^{-1}$ (*déjà calculé* à *l'exercice* 3)

Affirmation 5 : **VRAI**

$2^4 = 2\times2\times2\times2 = 16$

$2^{-2} = \frac{1}{4}$ (*déjà calculé* à *l'exercice* 2)

$\frac{16}{\frac{1}{4}} = 16 \div \frac{1}{4}$ (*voir le premier point du rappel*)

$16 \div \frac{1}{4} = 16\times4 = 64$ (*voir le deuxième point du rappel*)

Or $64 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6$

DÉCOUVERTE D'UNE PROPRIÉTÉ

1. $10^5 = 100\,000$

$10^4 = 10\,000$

$10^3 = 1000$

$10^2 = 100$

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

Cette règle a déjà été découverte en 4e.

Pour écrire les puissances de 10 en écriture décimale, l'exposant positif correspond au nombre de 0 qui suit le chiffre « 1 ».

10^{-1} *est l'inverse de* 10^1 *donc* $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

10^{-2} *est l'inverse de* 10^2 *donc* $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

10^{-3} *est l'inverse de* 10^3 *donc* $10^{-3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

10^{-4} *est l'inverse de* 10^4 *donc* $10^{-4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

10^{-5} *est l'inverse de* 10^5 *donc* $10^{-5} = \dfrac{1}{100\,000} = 0{,}00001$

2. Pour écrire les puissances de 10 en écriture décimale, l'exposant indique le rang du chiffre « 1 » dans la partie décimale.

Par exemple pour 10^{-1}, on place le chiffre « 1 » au premier rang qui correspond au chiffre des dixièmes (juste après la virgule).

Pour 10^{-2}, on place le chiffre « 1 » au deuxième rang qui correspond au chiffre des centièmes.

On complète ensuite avec des 0 jusqu'au chiffre des unités.